

LEVÉS DE PLANS

A LA

STADIA

NOTES PRATIQUES POUR ÉTUDES DE TRACÉS

PAR I. MOINOT

INGÉNIEUR CIVIL

Ancien Ingénieur des études du Réseau Central de la Compagnie d'Orléans

TROISIÈME ÉDITION

Revue et améliorée

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES ET DES TÉLÉGRAPHES

49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 49

—
1877

la différence, qui est 154,5 (c'est le nombre que l'on appelle générateur).

RÈGLE LOGARITHMIQUE

DESCRIPTION

Le logarithme d'un nombre est composé de deux parties : de la partie entière qui est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 10 pour avoir ce nombre (c'est ce qu'on nomme la caractéristique), et d'une fraction décimale de 10, base des logarithmes. Dans les tables, la fraction décimale est représentée par des chiffres placés dans une colonne à droite de celle des nombres. Sur la règle, cette fraction est donnée par une longueur linéaire. Cette longueur est prise entre les deux traits indiquant la valeur d'une caractéristique et elle est la distance entre le trait de gauche de cette caractéristique et le trait indiquant le nombre. Les nombres et leur logarithme sont par conséquent superposés.

Pour obtenir avec les tables le logarithme de deux nombres ou de la différence entre leur logarithme, on écrit l'un sur l'autre le logarithme de ces nombres pour en faire la somme ou la différence. Avec la règle, la somme ou la différence des logarithmes des deux nombres s'obtient en ajoutant à la longueur linéaire d'un nombre celle de l'autre nombre, au moyen de la coulisse, ou en retranchant l'une de l'autre. (Voir *Usage de la règle*, page 51.)

On voit par cette comparaison entre les tables et les

échelles que les tables donnent le chiffre du logarithme du nombre dont on cherche la valeur, tandis qu'avec les échelles la valeur du nombre cherché est immédiatement donnée, sans qu'il soit nécessaire de connaître son logarithme.

Les règles logarithmiques qu'on trouve dans le commerce ne sont pas disposées en vue des opérations à la Stadia. Les logarithmes des sinus et des tangentes, inscrits suivant la division sexagésimale, n'y figurent qu'accessoirement.

Une nouvelle règle a dû être appropriée à la méthode que j'expose. Sa longueur mesure 0^m,40. Elle diffère de la petite règle de Lenoir par le nombre et la disposition des échelles. La coulisse glissant dans une double rainure reste toujours dans le plan de la partie fixe, quelque face qu'on considère. (*Planche 3.*)¹

Elle porte : 1° Six échelles des nombres accolées deux à deux, bout à bout. 2° Deux échelles semblables des sinus carrés d'une partie des angles dont les logarithmes sont compris dans la caractéristique 9. 3° L'échelle des sinus dont les logarithmes sont compris dans les caractéristiques 8 et 9. 4° L'échelle des tangentes des angles dont les logarithmes sont compris dans les caractéristiques 8, 9, 10 et 11. Entre les caractéristiques 8 et 10, les divisions sont comptées de gauche à droite; entre 10 et 12 elles sont comptées de droite à gauche en opérant par complément, autrement dit, en ajoutant à la valeur du nombre la partie

¹ La règle logarithmique de 0^m,40 de longueur est assez incommode à porter sur le terrain. Pour parer à cela, M. Richer construit actuellement une deuxième règle de 0^m,25 de longueur gravée sur ivoire; elle ne diffère de celle de 0^m,40 que par les groupes des divisions de la même espèce.

de l'échelle comprise entre le trait de l'angle et celui de l'extrémité de droite de l'échelle. 5° L'échelle des parties égales d'une unité, ou caractéristique.

Les échelles des sinus carrés servent à la recherche des distances, celles des sinus et tangentes aux calculs des coordonnées rectangulaires et des hauteurs, et celle des parties égales sert à déterminer les logarithmes des nombres et à extraire les racines.

Sur la partie fixe, on a placé des échelles des nombres de chaque côté de la coulisse. Ce double emploi a pour but d'accélérer le travail en permettant de faire simultanément les calculs des distances et des hauteurs. Sur la même face de la coulisse se trouvent les échelles des tangentes dans la demi-largeur supérieure et les échelles des sinus carrés et des parties égales sur l'autre demi-largeur. La face opposée porte sur sa demi-largeur supérieure les échelles des sinus et sur l'autre demi-largeur les échelles glissantes des nombres.

On est convenu d'appeler l'échelle de gauche des nombres 1^{re} échelle, celle de droite, 2^{me} échelle. On désigne indifféremment les deux parties d'échelle des sinus et des tangentes par les noms de 1^{re} et 2^{me} échelle ou par ceux d'échelle de la caractéristique 8 et de la caractéristique 9.

La règle ne porte que les caractéristiques 8 et 9 des sinus et tangentes, les caractéristiques 5, 6 et 7 n'y sont donc pas représentées. On supplée à cette lacune en supposant que les parties fractionnaires des logarithmes affectés de ces caractéristiques et dont les angles ne s'étendent qu'aux $636/1000^{\circ}$ du premier grade sont égales aux parties fractionnaires des logarithmes dont

la caractéristique est 8. Pour faire les calculs avec un angle qui ne figure pas sur la règle, on élève cet angle à une puissance de 10 qui le ramène dans la caractéristique 8, et c'est avec ce nouvel angle qu'on opère.

Cet artifice n'entraîne à aucun calcul avec la division centésimale, puisqu'il consiste en un déplacement mental de la virgule séparant les unités des fractions de l'angle. Ainsi, on dit sans embarras que la partie fractionnaire du logarithme de l'angle de $0^{\circ}34$ est égale à celle de l'angle $5^{\circ}4$.

DIVISIONS

Les divisions doivent être nettes et leur écartement assez faible pour qu'il soit facile d'apprécier à l'œil le fractionnement. Avec une longueur de règle de 0,40, qui donne 0,20 à une échelle ou caractéristique et qu'on partage en plusieurs groupes, on obtient des divisions qui remplissent cette condition.

Échelles des nombres. — Une échelle des nombres est fractionnée en trois groupes de divisions : le premier part de l'origine, qui est le nombre 10, et s'étend jusqu'à 20 ; le deuxième va de 20 à 40, et le dernier de 40 à 100.

Les traits du 1^{er} indiquent des $\frac{1}{10}$ d'unité ; 10,1 — 10,2 — 10,3, — etc.

Les traits du 2^{me} indiquent des $\frac{1}{5}$ d'unité ; 20,2 — 20,4 — 20,6, — etc.

Les traits du 3^{me} indiquent des $\frac{1}{2}$ d'unité ; 40,5 — 41,0 — 41,5, — etc.

Les divisions de la deuxième échelle sont les mêmes que celles de la première à laquelle elle est accolée ; il

n'y a de différence que sur les chiffres dont la valeur augmente d'une puissance de 10.

Ainsi, les divisions de la première échelle qui se lisent : 10,1-10,2-...20,2-20,4-...40,5-41,0-...99,0-99,5 et 100, se lisent dans la 2^{me} :

101-102-... 202-204-... 405-410-... 990-995 et 1000.

Ce qui revient à dire que, quand la valeur du premier chiffre à gauche d'une échelle augmente d'une puissance quelconque de 10, celle de tous les traits de la même échelle augmente de la même puissance. Par la même raison, si la valeur diminue d'une puissance de 10, les autres traits diminueront de la même puissance.

Échelle des sinus carrés. — Les longueurs s'obtiennent en multipliant le nombre lu sur la mire par le sinus carré de l'angle vertical. Comme dans les opérations l'angle avec la verticale ne doit pas être moindre que 50 grades sans qu'on ait à craindre une grande incertitude dans les résultats, cette échelle ne s'étend que de 40 grades à 100 grades qui est l'horizontale.

Elle contient quatre groupes de divisions conformes au tableau suivant :

INDICATION DES GROUPES.	ÉTENDUE DES GROUPES.	VALEUR DES intervalles DES TRAITS.	LECTURE DES DIVISIONS.
1	grades grades 40 à 60	grades 0,2	40,2-40,4-40,6-.....59,6-59,8-60
2	60 à 80	0,5	60,0-60,5-61,0-.....79,0-79,5-80
3	80 à 90	1,0	80 —81 —82 —.....88 —89 —90
4	90 à 100	2,0	90-92-94-96-98-100

Échelles des sinus. — Les échelles des sinus des caractéristiques 8 et 9 sont partagées en huit groupes de divisions dans lesquels les intervalles des traits ont des valeurs différentes, ainsi que l'indique le tableau ci-dessous :

INDICATION DES GROUPES.	ÉTENDUE DES GROUPES.	VALEUR DES Intervalles DES TRAITS.	LECTURE DES DIVISIONS.
	grades grades	g.ades	
1	0,657 à 2,0	0,01	0,64— 0,65— 0,66— 1,98— 1,99— 2,0
2	2,0 à 4,0	0,02	2,02— 2,04— 2,06— 3,96— 3,98— 4,0
3	4,0 à 10,0	0,05	4,05— 4,10— 4,15— 9,90— 9,95— 10,0
4	10,0 à 20,0	0,10	10,10— 10,20— 10,30— 19,80— 19,90— 20,0
5	20,0 à 40,0	0,20	20,20— 20,40— 20,60— 39,60— 39,80— 40,0
6	40,0 à 60,0	0,50	40,50— 41,0 — 41,50— 59,0 — 59,50— 60,0
7	60,0 à 90,0	1,0	61 — 62 — 63 — 88 — 89 — 90
8	90,0 à 100	5,0	90—95—100

Échelles des tangentes. — Les échelles des tangentes sont partagées en cinq groupes de divisions comprenant également les caractéristiques 8 et 9. Ils sont semblables aux cinq premiers des échelles des sinus, avec cette seule différence que le cinquième est prolongé jusqu'à 50 grades formant la fin de la deuxième échelle.

NUMÉRATION DES ÉCHELLES

Échelles des nombres. — La numération de la première échelle va de 10 à 100, celle de la deuxième de 100 de la précédente à 1000.

Échelles des sinus carrés. — Deux échelles des sinus carrés sont gravées sur la règle : l'une a son origine à gauche et l'autre à droite. Celle qui a son origine à gauche permet de calculer par un seul mouvement de coulisse les distances et les hauteurs ou tangentes. Cette propriété est due à la position sur la règle de l'origine marquée 100. Par l'opération de la recherche de la distance, cette origine est amenée au-dessus de la distance lue sur l'échelle inférieure des nombres. En même temps, une des caractéristiques de l'échelle des tangentes se trouve au-dessous de cette distance prise sur l'échelle supérieure des nombres, c'est-à-dire dans la position voulue pour calculer les hauteurs.

L'échelle qui a son origine à droite paraît préférable pour le calcul des distances seules. L'origine est amenée sur le nombre générateur et la distance est lue sous l'angle.

Ces deux échelles comprennent 60 grades et elles portent deux rangées de chiffres; la rangée supérieure s'applique aux angles lus sur le premier quadrant, et la rangée inférieure aux angles lus sur le deuxième quadrant.

Échelles des sinus. — Les échelles des sinus portent deux rangées de chiffres : la rangée supérieure, qui va de gauche à droite, désigne les sinus des angles du premier quadrant; la deuxième va de droite à gauche, elle indique les sinus des angles du deuxième quadrant. Le cosinus de l'angle d'un quadrant étant égal au sinus du même angle du quadrant adjacent, ces deux rangées de chiffres indiquent les sinus et les cosinus des deux

premiers quadrants; ainsi le cosinus de 65 grades du premier quadrant est égal au sinus 165 grades du deuxième. Si on considère les lignes trigonométriques du deuxième quadrant, c'est la rangée de chiffres inférieure, allant de droite à gauche, qui donne les sinus, et c'est dans celle qui va de gauche à droite qu'on trouve les cosinus. D'un autre côté, les angles des quadrants opposés ayant les mêmes sinus et cosinus, les deux rangées de chiffres donnent encore les sinus et cosinus des troisième et quatrième quadrants. Ainsi le sinus de l'angle 565 grades du troisième quadrant est égal au sinus 65 grades du premier quadrant qu'on trouve dans la série de chiffres supérieure, et le cosinus est égal au sinus 165 grades qui se lit dans la série inférieure de chiffres.

Ces deux lignes de chiffres, pour marquer les angles des échelles des sinus, permettent donc de trouver les sinus et les cosinus des angles de toute la circonférence. En outre, on remarquera que cette disposition simplifie la recherche des deux coordonnées rectangulaires, qui s'obtiennent en général avec la même position de la coulisse. En effet, quand une des deux rangées de chiffres a donné le sinus d'un angle, on trouve le cosinus en se portant au même angle, écrit dans l'autre rangée, abstraction faite de la centaine. Avec la division centésimale, la recherche des sinus et cosinus des angles de toute la circonférence se fait sans aucune difficulté, parce que l'écriture des angles ne change que dans le chiffre des centaines. Il n'en serait pas de même avec la division sexagésimale.

Échelles des tangentes. — Les échelles des tangentes, comme celles des sinus, portent deux lignes de chiffres ; mais elles ont une propriété différente, elles se complètent réciproquement. La supérieure va de gauche à droite, et l'inférieure va de droite à gauche pour ne former qu'une série comprenant les tangentes de tout un quadrant. Les logarithmes des tangente et cotangente d'un angle étant complémentaires, ces deux rangées de chiffres indiquent également les cotangentes. On peut encore dire que la rangée des chiffres qui vont de gauche à droite indique les angles dont la tangente est plus petite que le rayon, tandis que l'autre rangée qui va de droite à gauche indique ceux dont la tangente est plus grande que le rayon. C'est l'inverse pour les cotangentes. La séparation est précisément à l'angle 50 grades, dont la tangente est égale au rayon.

Il résulte de cette propriété que la tangente et la cotangente d'un angle se trouvent sur la même division de l'échelle. Pour avoir la tangente et la cotangente d'un angle, voici comment on doit s'y prendre.

Si l'angle est plus petit que 50 grades, il faut pour la tangente retrancher de la longueur du rayon, autrement dit de la distance comptée sur l'échelle des nombres, la partie d'échelle des tangentes comprise entre l'angle et son extrémité de droite marquée 50 grades ; pour la cotangente, ajouter la même partie d'échelle ; si l'angle est plus grand que 50 grades, c'est l'inverse, puisque dans ce cas la tangente est plus grande et la cotangente plus petite que le rayon.

Échelle des parties égales. — L'échelle des parties égales a la longueur d'une unité ou caractéristique ; elle est divisée en $\frac{4}{10}$ de millimètre. Elle porte deux lignes de chiffres : la ligne supérieure qui va de gauche à droite indique les logarithmes ; celle qui va de droite à gauche indique les compléments arithmétiques.

LECTURE DES ÉCHELLES

Échelles des nombres. — Les changements dans la valeur des divisions des échelles des nombres doivent être étudiés en lisant les traits l'un après l'autre, à partir de l'origine, avec des variations d'une puissance de 10 dans leur valeur. C'est le plus sûr moyen d'arriver à procéder avec exactitude et sans tâtonnement.

En étudiant ces transformations, on observera que quand le premier trait de gauche d'une échelle est élevé à la quatrième puissance de 10, c'est-à-dire lorsque le premier trait de gauche marque 10000, l'intervalle des traits du troisième groupe représente 500 ; que par conséquent la détermination des trois derniers chiffres de la partie entière est incertaine. Cette incertitude peut donner lieu à des erreurs considérables.

Il est possible, il est vrai, d'obvier à cette difficulté dans les opérations d'arithmétique au moyen de calculs faciles qui font connaître le degré d'approximation. Néanmoins, l'utilité des échelles logarithmiques est contestable quand on n'a à effectuer que de sim-

ples multiplications; elles sont employées avec avantage, au contraire, dans les rapports et proportions. Lorsque les nombres sont combinés avec les lignes trigonométriques, il n'y a pas de méthode qui permette d'obtenir la valeur des derniers chiffres. Il faut alors recourir aux tables, si l'on a besoin d'une grande précision. Mais dans le levé à la Stadia, il est rare que les nombres entiers qui sont exprimés en mètres surpassent 400; l'inconvénient disparaît alors, puisque là les échelles donnent avec assez d'exactitude le dernier chiffre des unités.

Échelles des lignes trigonométriques. — Dans les échelles des sinus, sinus carrés et tangentes, les divisions sont fixes; il n'y a donc à étudier que la valeur de l'intervalle des traits dans chaque groupe. En revanche, la numération des angles nécessite une étude spéciale quand on veut vérifier qu'elle s'applique à tous les angles de la circonférence. Il faut donc bien se familiariser avec les règles données ci-dessus.

USAGE DE LA RÈGLE

Les calculs avec la règle logarithmique se réduisent à des additions et des soustractions des diverses parties de la graduation, qui s'effectuent au moyen de la partie fixe et de la coulisse.

L'addition se fait en ajoutant de gauche à droite, bout à bout, les deux parties qui doivent former la somme.

La soustraction se fait en plaçant les deux parties en regard ; la division marquant l'extrémité de droite de la partie à retrancher est amenée sur celle qui indique également l'extrémité de droite de l'autre partie. On lit le reste sur cette dernière, au-dessus de l'extrémité gauche de la partie qu'on retranche.

On ne peut ajouter que deux portions de la graduation d'un seul mouvement de coulisse. Par conséquent, la somme formée de plus de deux logarithmes ne s'obtient qu'en manœuvrant la coulisse autant de fois qu'il y a de logarithmes à ajouter. On ajoute d'abord deux logarithmes, puis un troisième à la somme, et ainsi de suite.

La même observation s'applique à la soustraction.

Quand on a plusieurs logarithmes à retrancher, il faut déplacer successivement la coulisse. On retranche d'abord le premier, puis le deuxième, du reste, et ainsi de suite.

Du même mouvement de la coulisse on peut ajouter deux logarithmes et retrancher de leur somme un troisième. Pour cela, il faut commencer par effectuer la soustraction sur un des deux logarithmes à ajouter, puis ajouter au reste l'autre logarithme.

On peut ainsi trouver, par une seule manœuvre, les deux côtés d'un triangle dont on a les angles et le troisième côté. Le quatrième terme d'une proportion se détermine encore de même au moyen des trois autres.

Je placerai ici quelques observations qui faciliteront la recherche de la valeur relative des nombres déterminés au moyen des échelles.

Lorsqu'on ajoute deux parties de la graduation, il se présente trois cas : 1° La somme des fractions de ces logarithmes donne une unité plus une fraction ; 2° une unité sans fraction ; 3° une fraction seulement.

1° *La somme des fractions donne une unité plus une fraction* quand la division de la règle qui indique cette somme est à droite du trait du milieu marqué 100 de la même règle, l'origine étant à gauche.

2° *La somme des fractions donne une unité juste* quand la division qui la désigne est le trait 100.

3° *Elle ne donne qu'une fraction* lorsque la division qui l'indique est, en même temps que l'origine de gauche des parties ajoutées, sur la même échelle des nombres.

La recherche de la différence entre deux logarithmes présente également trois cas : 1° Le logarithme duquel on retranche une fraction est diminué d'une unité en conservant une fraction ; 2° il est diminué de sa fraction juste ; 3° il n'est diminué que d'une partie de sa fraction.

1° *Le logarithme duquel on retranche une fraction est diminué d'une unité en conservant une fraction* quand la division qui indique le reste se trouve à gauche du trait du milieu de la règle marqué 100, l'origine de la soustraction étant à droite.

2° *Il est diminué de sa fraction juste* quand la division qui indique le reste est le trait de la division 100 du milieu de la règle.

3° *Il est diminué d'une partie de sa fraction seulement* lorsque le trait qui indique le reste est sur la

même moitié de la règle que le point de départ de la soustraction.

Lorsqu'on a étudié les logarithmes, on n'est pas embarrassé pour trouver la valeur des nombres cherchés en se référant aux indications ci-dessus qui aideront à déterminer la caractéristique finale.

On se dispensera de recourir aux tables pour cette détermination, en consultant le tableau suivant qui indique la place des caractéristiques des sinus et des tangentes :

SINUS.	{	Caract.	5	—	6	—	7	—	8	—	9	—	10
	{Angles. 0°001 — 0°007 — 0°064 — 0°637 — 6°35 — 50 gr.												
TANG.	{	Caract.	5	—	6	—	7	—	8	—	9	—	10
	{Angles {0°001 — 0°007 — 0°064 — 0°637 — 6°35 — 50 gr.												
	{100° — 99°994 — 99°937 — 99°564 — 95°66 — 50 gr.												
	{	Caract. inf.	—	14	—	13	—	12	—	11	—	10	

Quand on a acquis le sentiment des longueurs, on n'est plus exposé à leur donner des valeurs trop fortes ou trop faibles, parce que l'erreur sur les nombres serait trop grossière pour ne pas s'apercevoir qu'on les rendrait dix fois, cent fois, mille fois, etc., trop grandes ou trop petites. On peut aussi se tirer d'affaire par des approximations successives qui sont facilitées par la division centésimale. Ainsi, soit la tangente de 0°006 sur une distance de 104^m; on dit : $0,006 \times 10 = 0,06$, $0,006 \times 100 = 0,6$, $0,006 \times 1000 = 6,0$. On fait l'opération sur 6 grades, qui donne 98,40 sur l'échelle des nombres. Il serait absurde de donner une longueur de 98,40, qui serait trop forte, ou de 0°984, qui serait trop faible pour 6 grades sur 104 mètres.

même moitié de la règle que le point de départ de la soustraction.

Lorsqu'on a étudié les logarithmes, on n'est pas embarrassé pour trouver la valeur des nombres cherchés en se référant aux indications ci-dessus qui aideront à déterminer la caractéristique finale.

On se dispensera de recourir aux tables pour cette détermination, en consultant le tableau suivant qui indique la place des caractéristiques des sinus et des tangentes :

SINUS.	Caract.	5	—	6	—	7	—	8	—	9	—	10
	Angles.	0°001	—	0°007	—	0°064	—	0°637	—	6°35	—	50 gr.
TANG.	Caract.	5	—	6	—	7	—	8	—	9	—	10
	Angles	{ 0°001	—	0°007	—	0°064	—	0°637	—	6°35	—	50 gr.
		{ 100°	—	99°994	—	99°937	—	99°564	—	93°66	—	50 gr.
	Caract. inf.	—	14	—	13	—	12	—	11	—	10	

Quand on a acquis le sentiment des longueurs, on n'est plus exposé à leur donner des valeurs trop fortes ou trop faibles, parce que l'erreur sur les nombres serait trop grossière pour ne pas s'apercevoir qu'on les rendrait dix fois, cent fois, mille fois, etc., trop grandes ou trop petites. On peut aussi se tirer d'affaire par des approximations successives qui sont facilitées par la division centésimale. Ainsi, soit la tangente de 0°006 sur une distance de 104^m; on dit : $0,006 \times 10 = 0,06$, $0,006 \times 100 = 0,6$, $0,006 \times 1000 = 6,0$. On fait l'opération sur 6 grades, qui donne 98,40 sur l'échelle des nombres. Il serait absurde de donner une longueur de 98,40, qui serait trop forte, ou de 0°984, qui serait trop faible pour 6 grades sur 104 mètres.

Cette longueur est donc de 9,84. Dans le cas proposé, l'angle 6 grades étant mille fois plus grand que l'angle 0,006, la longueur 9,84 est également mille fois trop grande.

Donc, la tangente de $0^{\circ}006 \times 104$ est de 0,00984.

Lorsque l'angle est compté dans le premier quadrant, on fait les approximations sur le complément de l'angle lu sur le cercle. Ainsi, l'angle lu étant de 99,994, on opère sur l'angle de 0,006 qui est son complément.

Ce mode d'approximation est également applicable pour les sinus et les cosinus.

CALCULS

L'établissement d'un plan coté levé au Tachéomètre n'exige que trois sortes de calculs avec les échelles logarithmiques : calcul des distances horizontales, calcul des hauteurs verticales et calculs des coordonnées rectangulaires des points de base.

CALCULS DES DISTANCES

Quand la lunette se projette obliquement sur un point, la distance lue sur la mire est plus grande que l'horizontale : d'abord, par l'inclinaison de la course du rayon, ensuite, par la lecture des fils, qui se fait obliquement sur la mire posée verticalement. La distance lue dans ces conditions est réduite à l'horizon en la multipliant par le sinus carré de l'angle formé

par le rayon de projection et la verticale. Ce moyen pratique n'est pas mathématiquement exact; mais l'erreur qui en résulte n'étant que de quelques millimètres, sur les plus grandes distances mesurées dans les levés au Tachéomètre, on peut le considérer comme suffisant.

Le calcul de la distance s'opère avec l'échelle des sinus carrés, qui à son origine à gauche, en amenant la valeur de l'angle qu'on trouve sur cette échelle au-dessus du nombre générateur pris sur l'échelle des sinus carrés, marquée 100, indique sur l'échelle des nombres la distance cherchée.

En désignant par a l'angle, par g le nombre générateur, par o l'origine de l'échelle et par x la distance cherchée, on a sur les échelles :

$$\begin{array}{l} \text{Coulisse.} \quad \frac{o}{x} \cdots \cdots \frac{a}{g} \\ \text{Règle.} \quad \cdot \end{array}$$

Si on donne à a et à g les valeurs respectives de 94° et de 105 mètres, l'origine o de l'échelle des sinus carrés se projettera sur 104, de l'échelle des nombres, qui est la valeur de x . (*Fig. 2, planche 3.*)

Dans cette position des échelles, une des caractéristiques (la caractéristique g) de l'échelle des tangentes est également sur 104 de l'échelle supérieure des nombres; de sorte que cette échelle occupe la position qu'elle doit avoir pour calculer la valeur de la tangente, qui est 9^m84 . On a donc du même coup la distance et la hauteur.

L'angle vertical étant inférieur à 100 grades, comme dans l'exemple ci-dessus, la lecture se fait

dans la rangée supérieure des chiffres ; elle se ferait dans la rangée inférieure, si l'angle était plus grand que 100 grades.

Pour faire les calculs avec la deuxième échelle des sinus carrés, qui a son origine à droite, on a sur les échelles :

$$\begin{array}{l} \text{Coulisse.} \quad \frac{a}{x} \dots\dots \frac{o}{g} \\ \text{Règle.} \quad \cdot \end{array}$$

Pour cela on amène l'extrémité de droite marquée 100 sur le nombre générateur ; c'est au-dessous de l'angle qu'on trouve sur l'échelle des nombres la distance x .

Soit 120 grades l'angle vertical et 95 mètres le nombre générateur, on trouve 85,9 pour x au-dessous de l'angle 120 grades lu dans la rangée inférieure des chiffres. On voit que le même nombre 85,9 correspond à l'angle 80 grades lu sur la rangée supérieure des chiffres, et que par conséquent la même opération s'applique aux angles inférieurs à 100 grades. (*Fig. 5 planche 5.*)

CALCULS DES HAUTEURS

Les hauteurs cherchées sont données par la distance horizontale multipliée par la tangente de l'angle d'inclinaison avec l'horizon. On sait déjà que, quand le zéro du vernier marque 100 grades, l'axe optique est de niveau. Quand la lunette s'élève au-dessus de l'horizon, le vernier est entraîné dans le quadrant de 100 grades à 0 grade. L'angle à l'horizon est alors le complé-

ment de l'angle lu sur le cercle. Quand, au contraire, la lunette s'abaisse au-dessous de l'horizon, le vernier parcourt le quadrant de 100 à 200 grades. L'angle à l'horizon est dans ce cas l'angle lu, abstraction faite de la centaine.

Par conséquent, c'est la cotangente de l'angle lu sur le premier quadrant qui donne la hauteur au-dessus de l'horizon, tandis que c'est la tangente de l'angle lu sur le deuxième quadrant, abstraction faite de la centaine, qui donne la distance au-dessous de l'horizon.

En pratique, on ne fait pas cette distinction, qui pourrait donner de l'embarras. On confond ces deux lignes sous le nom de tangentes.

On se sert alors, pour calculer les hauteurs données par les angles du premier quadrant, de la rangée de chiffres qui va de droite à gauche et qui reproduit les angles tels qu'ils sont lus sur le cercle. Les calculs des hauteurs données par les angles du deuxième quadrant sont faits au moyen des chiffres de la rangée supérieure qui va de gauche à droite et qui reproduit également les angles tels qu'ils sont lus sur le cercle, abstraction faite du chiffre des centaines.

Lorsque, par exception, l'angle avec la verticale est plus petit que 50 grades, la hauteur est plus grande que la distance. Dans ce cas, on ajoute à la division de l'échelle des nombres qui indiquent la distance la partie d'échelle des tangentes comprise entre l'extrémité de droite marquée 50 grades et le trait de la graduation indiquant l'angle. Mais alors il faut changer de rangée de chiffres. On prend la rangée supérieure lorsque l'an-

gle est dans le premier quadrant, et la rangée inférieure quand il est dans le deuxième.

EXEMPLES DE CALCULS

Déterminer la hauteur donnée par l'angle 94 grades, sur une distance horizontale de 104 mètres. (*Fig. 4, planche 3.*)

On amène la caractéristique 9 sur la division 104 de la deuxième échelle des nombres; puis on se porte à l'angle 94 grades, qu'on trouve dans la rangée de chiffres qui va de droite à gauche, et l'on voit sur l'échelle des nombres qu'il correspond à 9,84 qui est la hauteur cherchée. Cette hauteur, étant au-dessus de l'horizon, est portée dans la colonne 10 du carnet du Tachéomètre.

Si l'angle était de 106 grades, sur la même distance de 104 mètres, l'opération serait semblable à celle ci-dessus, puisque l'angle 106 grades est sur le même trait que l'angle 94 grades. La seule différence consisterait dans la position de la cote de hauteur, 9^m84, qui serait en descendant, et qui devrait alors être portée dans la colonne 11 du carnet du Tachéomètre.

Quand l'angle est inférieur à 0°637, sa fraction logarithmique ne se trouve pas sur la règle. Pour trouver cette fraction, on donne à l'angle une valeur 10 fois, 100 fois ou 1,000 fois plus grande pour l'amener dans la caractéristique 8, où l'on trouve cette fraction avec suffisamment d'exactitude.

Soit, par exemple, l'angle 100,60 ou 99,40 sur 104 mètres de distance, on le porte à 106,0 ou 94,0 en le

multipliant par 10. La hauteur $9^m,84$, que cet angle donne, est 10 fois trop grande ; elle est alors de $0^m,984$. C'est encore la même opération, avec la règle, que celles ci-dessus (1).

Pour trouver la longueur de la tangente d'un angle supérieur à 50 grades avec l'horizon, c'est par complément qu'il faut opérer. Pour cela, on amène les échelles dans la position suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Règle.} \quad . \quad \frac{r}{a} \quad \dots \quad \frac{x}{o} \\ \text{Coulisse.} \end{array}$$

r est la longueur prise pour rayon, a l'angle de la tangente, o l'extrémité de l'échelle des tangentes marquée 50, et x la longueur cherchée.

En donnant à r la valeur de $78^m,6$, à a celle de 56 grades, la valeur de x sera de 95^m . (*Fig. 5, pl. 3.*)

COORDONNÉES RECTANGULAIRES

Les coordonnées sont des projections perpendiculaires x, y , d'un point sur deux lignes fixes rectangulaires. (*Fig. 10, pl. 3.*)

Pour déterminer les projections de plusieurs points, A, B, C, etc., on calcule par cheminement les triangles rectangles dont les côtés rectangulaires x, y , parallèles

1. Je ferai remarquer que, quand on fait le calcul des distances et des tangentes par le même mouvement de coulisse, au moyen de l'échelle de gauche des sinus carrés, il arrive dans certains cas que la recherche des distances ne peut pas être faite indifféremment sur l'une ou l'autre des échelles des nombres. On doit la faire sur l'échelle des nombres de droite, quand l'angle est à gauche de la caractéristique 9 des tangentes, et sur celle de gauche, quand l'angle est à droite de cette caractéristique.

aux lignes fixes des coordonnées, s'appuient sur deux points consécutifs. On connaît dans ces triangles les hypoténuses et les angles.

Dans le levé à la Stadia, les axes des coordonnées sont déterminés par l'orientation du Tachéomètre au point de départ. Ils sont établis de façon à ce que les projections de tous les points soient positives, c'est-à-dire se trouvent dans le même angle droit. (*Fig. 11, pl. 5.*)

Pour résoudre les problèmes qui vont suivre, j'appellerai h la ligne qui joint deux points consécutifs, a l'angle formé par cette ligne avec l'orientation du Tachéomètre, x le côté rectangulaire perpendiculaire à l'orientation, y le côté qui lui est parallèle. On voit immédiatement que les x sont donnés par le sinus de l'angle horizontal et les y par le cosinus.

$$x = h \sin. a \quad y = h \cos. a.$$

EXEMPLES DE CALCULS

1° La distance h de deux points étant de 255 mètres, l'angle azimutal de la ligne qui les joint de 55°60, déterminer les côtés rectangulaires y , x . (*Fig. 6, pl. 5.*)

On amène l'extrémité de droite de l'échelle des sinus marquée 100 grades sur le nombre 255 de la deuxième échelle des nombres; on détermine le sinus x en se portant à l'angle 55°60 qu'on trouve dans la rangée de chiffres qui va de gauche à droite, et on voit qu'il correspond au nombre 155,5. Sans déranger la coulisse, on se porte à l'angle 155°60 de l'autre rangée de chiffres pour avoir le cosinus y , on voit qu'il correspond à 216,2.

En faisant la somme des caractéristiques, on a, pour x , $135^m,5$; pour y , $216^m,2$.

2° *La distance h de deux points étant de 255 mètres, l'angle azimutal a de la ligne qui les joint de 355^s60 , déterminer les côtés rectangulaires.* L'angle 355^s60 est comme l'angle 135^s60 .

On amène l'extrémité de droite de l'échelle des sinus sur le nombre 255 de la deuxième échelle des nombres, on se porte à l'angle 135^s60 pour avoir le sinus x et on voit qu'il tombe sur 216,2, puis, sans déplacer la coulisse, on se porte à l'angle 35^s60 qui correspond à $135,5$ pour y . En faisant la somme des caractéristiques, on trouve $x = 216,2$, $y = 135,5$ (1).

3° *La ligne h qui joint deux points étant de 121 mètres, l'angle azimutal de 194^s80 , déterminer les côtés rectangulaires x et y .* Dans ce cas, il faut opérer par deux mouvements de la coulisse, parce que le sinus et le cosinus ne peuvent pas se trouver en même temps sur les échelles des nombres.

On commence par déterminer le sinus x . Pour cela on amène la caractéristique 9 sous le nombre 121 de l'échelle de droite des nombres, puis on se porte à l'angle 194^s80 qui coïncide avec le nombre 99 de la première échelle. La somme des caractéristiques donne, pour x , 9^m90 . (Fig. 7, pl. 5.)

Pour avoir le cosinus, on déplace la coulisse d'une caractéristique en la tirant à gauche; alors l'extrémité de droite de l'échelle coïncide avec le nombre 121 de

1. On voit que c'est la même opération avec la règle que celle de 1°. La différence entre les deux exemples porte sur les signes des sinus et cosinus: qui changent de place.

la deuxième échelle des nombres: en se portant à l'angle $94^{\circ}80'$, on voit qu'il correspond à 120,5. Faisant la somme des caractéristiques, on a $y = 120^m,5$. (Fig. 8, pl. 5.)

CALCULS DIVERS AVEC LA RÈGLE LOGARITHMIQUE

Quand un plan coté est dressé, il reste à faire le travail relatif à l'étude du tracé. L'usage de la règle logarithmique présente des avantages pour faire promptement ce travail.

Ainsi, il arrive souvent qu'on a besoin de tracer des courbes horizontales pour faciliter l'étude du tracé. Ces courbes passent presque toujours entre deux points dont on connaît les cotes, et il faut déterminer leur position entre ces points. Pour cela on a à trouver le quatrième terme d'une proportion dont on connaît les trois autres termes, dont un, la distance entre les deux points, est donné graphiquement.

Quand l'axe est tracé sur le plan, il passe, le plus souvent, entre deux points dont les cotes sont connues. Pour établir le profil en long, il faut connaître la cote au passage de l'axe entre ces deux points. Cette cote inconnue est le quatrième terme d'une proportion dont les autres termes sont connus: deux de ces derniers sont donnés graphiquement; la distance entre les deux points et la distance d'un de ces points à l'axe.

Quand le profil en long est rapporté, il faut calculer les cotes rouges des points du profil pour obtenir les cotes de déblai et de remblai. C'est encore à trouver le

quatrième terme d'une proportion dont les autres termes sont connus.

Pour le calcul des terrassements, on doit déterminer le point de passage du déblai ou remblai : c'est encore le même problème à résoudre.

CALCULS.

Pour trouver avec la règle logarithmique le quatrième terme d'une proportion, quand on connaît les trois autres termes, on se sert des échelles des nombres de la coulisse et de la règle fixe que l'on combine ensemble.

La formule d'une proportion étant :

$$a : b :: c : x,$$

On a sur les échelles combinées :

$$\begin{array}{l} \text{Coulisse.} \quad \frac{b}{a} \dots \frac{x}{c} \text{ ou } \frac{x}{c} \dots \frac{b}{a}, \\ \text{Règle.} \end{array}$$

selon que la fraction logarithmique de c est plus grande ou plus petite que celle de a .

On peut renverser les termes sur les échelles sans changer le résultat. On peut donc avoir :

$$\begin{array}{l} \text{Coulisse.} \quad \frac{a}{b} \dots \frac{c}{x} \text{ ou } \frac{c}{x} \dots \frac{a}{b}, \\ \text{Règle.} \end{array}$$

On observera que dans tous les cas le 1^{er} et le 5^e terme se trouvent toujours sur la même échelle et que le 2^e et le 4^e terme sont sur l'autre.

Soit, par exemple, à disposer les deux échelles de

façon à donner en millimètres les distances à rapporter sur un plan de 1 à 2500.

On a pour la formule :

$$2,500 : 1 :: n : x.$$

On amène la division 100 de la coulisse, qui est aussi la division 1, au-dessus de la division 250 de la règle, qui est également la division 2500. Dans cette position, les distances n prises sur l'échelle inférieure correspondent à leur longueur réduite en millimètres sur l'échelle supérieure.

Ainsi, en se portant successivement sur les nombres $n = 110, 140, 170, 200, 250, 300$, etc., de l'échelle inférieure, on trouvera respectivement sur la coulisse, au-dessous de ces nombres, les longueurs 44, 56, 68, 80, 100, 120, etc., en millimètres. (*Fig. 9, pl. 3.*)

USAGE DE L'ÉCHELLE DES PARTIES ÉGALES

Pour faire les calculs avec l'échelle des parties égales, on l'accrole face contre face à une échelle des nombres, de manière à faire coïncider leurs extrémités. Dans cette position, on peut trouver le logarithme de tous les nombres et extraire toutes les racines. (*Fig. 1, pl. 3.*)

EXEMPLES.

Trouver le logarithme de 871 084. On se porte sur l'échelle des nombres à la division 87,1 et on lit au-dessus, sur l'échelle des parties égales, 940. Ce chiffre est la partie fractionnaire du logarithme de 871 084. Ce dernier nombre étant composé de six chiffres, sa

caractéristique est 5. Donc, le logarithme entier est de 5,940.

Trouver la racine cubique de 871 084. On vient de voir que le logarithme de ce nombre est de 5,940. Il faut en prendre le $\frac{1}{3}$ pour avoir le logarithme de la racine cubique ou de la racine troisième ; $\frac{5,940}{3} = 1,980$ pour ce logarithme. En se portant à la division 980 de l'échelle des parties égales, on voit qu'il correspond à 95,5 de l'échelle des nombres. La caractéristique étant 1, c'est bien le nombre 95,5 qui est la racine cherchée.

RÉSUMÉ

Je me suis étendu sur l'usage de la règle logarithmique pour faire bien comprendre tout le parti qu'on peut en tirer. Les échelles présentent moins de chances d'erreurs que les autres procédés, parce qu'on opère sans pose de chiffres et partant avec beaucoup plus de célérité. Les seules erreurs que l'on puisse craindre sont relatives à l'appréciation des fractions de divisions. Comme elles sont plus faibles que l'approximation des observations, il n'y a pas à s'en préoccuper.

Un autre avantage de la règle à calcul, c'est qu'on trouve les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes pour tous les angles de la circonférence tels qu'ils sont lus sur les cercles. Avec les tables, au contraire, on ne les trouve que pour le 1^{er} et le 5^{me} quadrant. Pour les 2^{me} et 4^{me}, il faut changer les chiffres de l'angle ou la désignation des lignes trigonométriques du même ordre. C'est là une source fréquente d'erreurs que les calculateurs connaissent bien.

Remarque. — On pourra s'exercer aux calculs avec les échelles logarithmiques en suivant les exemples donnés ci-dessus. On se servira à cet effet des dessins de la règle (*planche 5*), suffisamment exacts pour des exercices. Les parties d'échelles des coulisses qui doivent être combinées par addition ou par soustraction à celles de l'échelle fixe des nombres seront prises au compas.

Comme on peut faire indifféremment toutes les opérations par addition ou par soustraction en considérant, soit le logarithme, soit son complément arithmétique, l'ouverture maximum du compas peut être réduite à dix centimètres, c'est-à-dire à la demi-longueur d'une partie entière ou caractéristique.

Si, par exemple, on avait à ajouter le logarithme du nombre 70 à celui du nombre 60, on prendrait au compas la partie d'échelle comprise entre 70 et 100, qui est le complément arithmétique du logarithme de 70, et on la retrancherait du logarithme du nombre 60.

RAPPORTEUR

DESCRIPTION ET USAGE

Si la position des points de détail sur le plan devait se déterminer au moyen de coordonnées, on serait condamné à un travail long et fastidieux non rémunéré par une garantie de plus grande exactitude. On se borne dans le fait à placer les points avec un Rapporteur et une échelle de proportion.

L'usage du Rapporteur dans le levé à la Stadia dif-